$$E_{-2} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad E_{-1} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{3} = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

↳ $E_\lambda = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ pour $\lambda \in \{-2, -1, 3\}$.

Alors

$$L = \underbrace{P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}}} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}}_{= P^{-1}_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}}}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/9 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix}$$

On veut

$$L^K \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{q}(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^K & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^K & 0 \\ 0 & 0 & 3^K \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/9 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^K & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^K & 0 \\ 0 & 0 & 3^K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \cdot (-2)^{k+2} + 7 \cdot (-1)^{k+2} + 3^{k+2} \\ -4 \cdot (-2)^{k+1} + 7 \cdot (-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ \boxed{-4 \cdot (-2)^{k} + 7 \cdot (-1)^{k} + 3^{k}} = a_k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix}$$

On voit que $\lim_{k \to +\infty} a_k = +\infty$ car 3^k est dominant.

(e.g. $\frac{a_7}{4} = 673, \dots$)

$\boxed{\text{Diagonalisation complexe}}$ = même méthode que pour les problème précédents mais dans $\mathbb{C}$!!

EXM 10.23 $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

dans $\mathbb{C}$!

Calculer les valeurs et vecteurs propres et diagonaliser A (dans $\mathbb{C}$!)

① $P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 1)$

$$\Rightarrow \text{valeurs propres} : \left\{ 2, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

② $$E_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \mathrm{Ker}\left(A - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) I_3 \right) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} L_3}]{L_1 \leftarrow \frac{i.2}{\sqrt{2}} L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

division par nombre dans ℂ !

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivots $\Rightarrow x_1, x_2$ var liées

Alors $\begin{cases} x_1 + i x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -i x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad E_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} -ix_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\text{Question}}$ Vous savez faire $\frac{2i}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}$???

$$= \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}}_{\text{ok}\checkmark} \cdot \underbrace{\frac{i}{\sqrt{3}-i}}_{\text{division !}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{i \cdot (\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(i\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{i}{2}$$

En conclusion

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

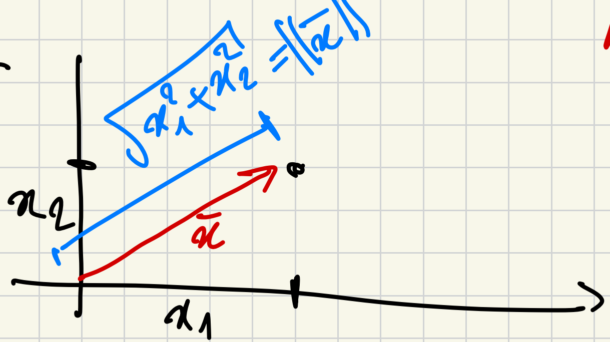
avec $P = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$\left(\text{dans ce cas } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right).$

Chapitre 11 : Produit scalaire

Déf 11.1 La <u>norme euclidienne</u> de $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est

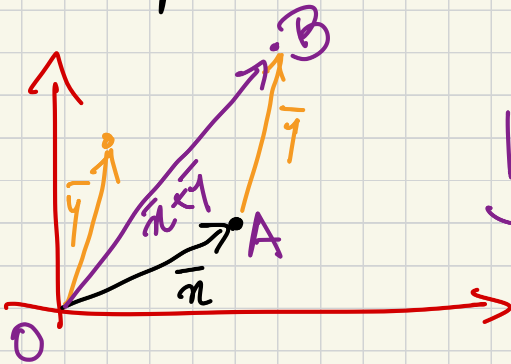
$$\underbrace{\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}_{\text{c'est la longueur de } \bar{x}}$$



$\boxed{\text{PROP 11.2}}$ • $\|\bar{x}\| \geq 0$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\|\bar{x}\| = 0$ ssi $\bar{x} = \bar{0}$

• $\|\lambda . \bar{x}\| = |\lambda| . \|\bar{x}\|$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

• $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ (inég. triangulaire)



$\underbrace{\text{longueur}(OB)}_{=\|\bar{x}+\bar{y}\|} \leq \underbrace{\text{longueur}(OA)}_{=\|\bar{x}\|} + \underbrace{\text{longueur}(AB)}_{=\|\bar{y}\|}$

$\boxed{\text{Déf 11.3}}$ On dit que $\bar{x}$ est normalisé ou unitaire si $\|\bar{x}\| = 1$.

Question Éd. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ <u>nonnul</u>.

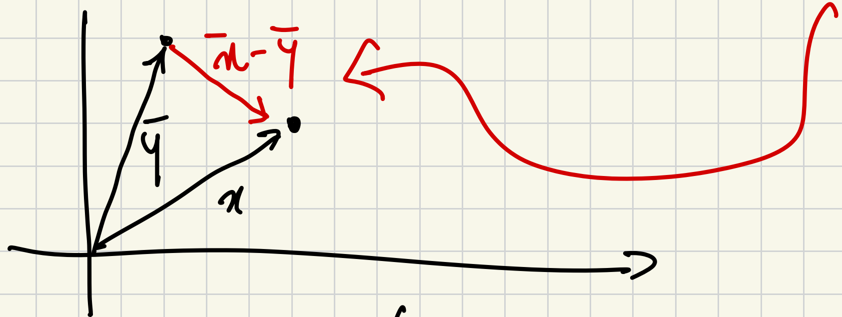
Comment peut-on trouver un vecteur colinéaire normalisé ??

$$\Bigg\| \boxed{\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}} \Bigg\| = \Bigg\| \underbrace{\boxed{\frac{1}{\|\bar{x}\|}}}^{=\lambda>0} \cdot \bar{x} \Bigg\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\| = \overbrace{\lambda}^{>0} \cdot \|\bar{x}\| = \frac{\|\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$$

$$= 1 !!$$

Vecteur normalisé.

Déf. 11.5 Éd. $\bar{x}$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, la distance entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ est $\|\bar{x} - \bar{y}\|$



Déf. 11.6 | É.d. $\bar{x}$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, le **produit scalaire euclidien** entre $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n \in \mathbb{R}$$

PROP. 11.8 (SYM) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

(BiL) $\bar{x} \bullet (\bar{y} + \lambda \bar{y}') = \bar{x} \bullet \bar{y} + \lambda\, \bar{x} \bullet \bar{y}'$

$(\bar{x} + \mu \bar{x}') \bullet \bar{y} = \bar{x} \bullet \bar{y} + \mu\, \bar{x}' \bullet \bar{y}$

(NORM) $\bar{x} \bullet \bar{x} = \|\bar{x}\|^2$

(CS) $|\bar{x} \bullet \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| . \|\bar{y}\|$ $\longleftarrow$ inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall\, \bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(Preuve de (CS)) Pour $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$:

$\|\bar{x} + t.\bar{y}\|^2 = (\bar{x} + t\bar{y}) \bullet (\bar{x} + t\bar{y})$